# 作ってわかる数学

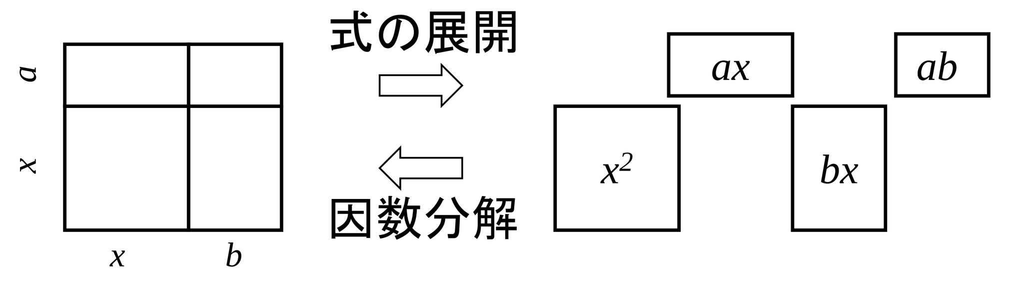
## 東京大学 生産技術研究所 機械・生体系部門　土屋研究室

### 数式と図形の等価性 ～因数分解～

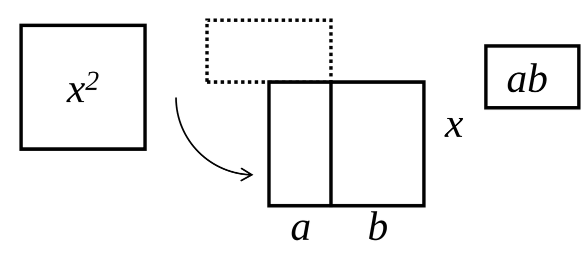
- 数学の概念は、数式、図形のどちらでも表現できる
  - 数式で表す：代数学
  - 図形で表す：幾何学
    ※もちろん言葉で表すこともできる
- 因数分解の意味を考えよう

### 数式と図形で表す 因数分解・式の展開（2次式）

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$




$$= x^2 + (a+b)x + ab$$



### 因数分解を言葉で表すと‥

掛け算を足し算で表す

（式の展開）

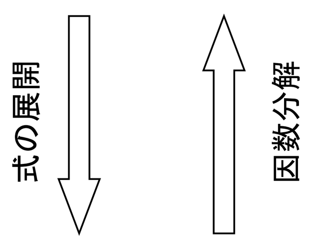
$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

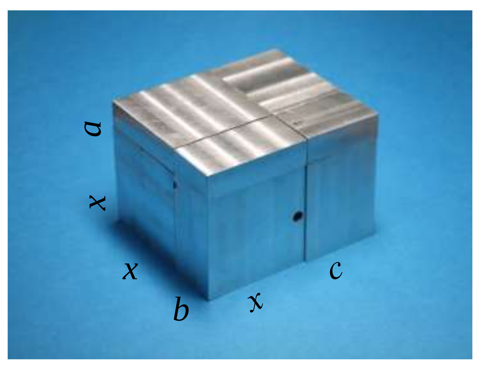
（因数分解）

足し算を掛け算で表す

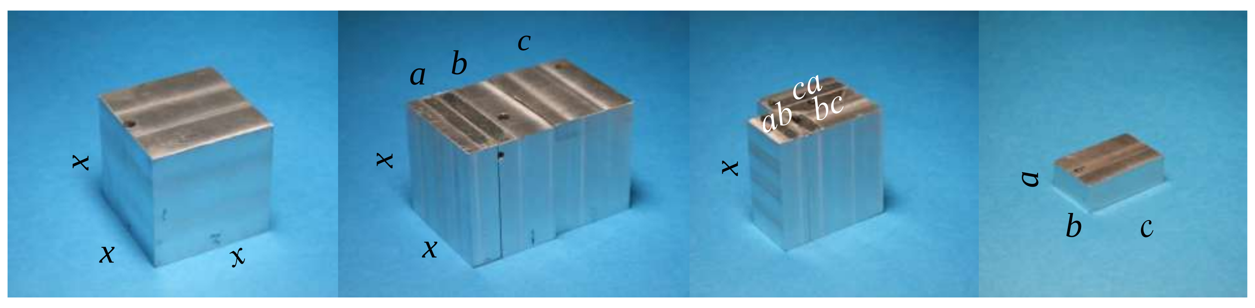
### 3次式を図形で表すと‥

$$(x+a)(x+b)(x+c)$$

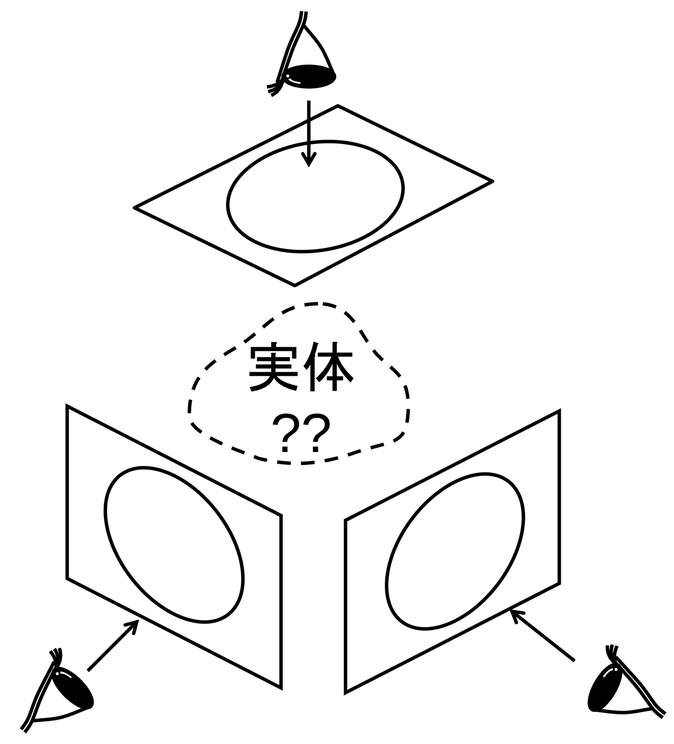


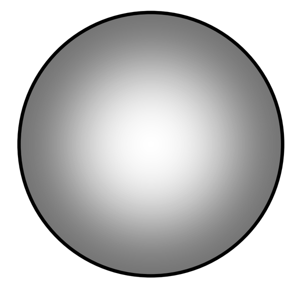
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$



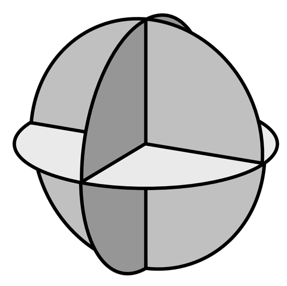
### 3面図でどこから見ても円形に見える立体




上面から見ても、側面から見ても、正面から見ても、円形に見えるのはどんな立体だろうか？

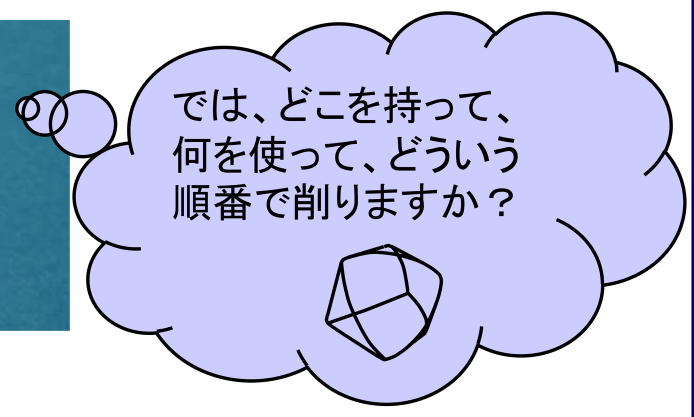


球　（表面積最小）



（体積最小）

（体積最大）



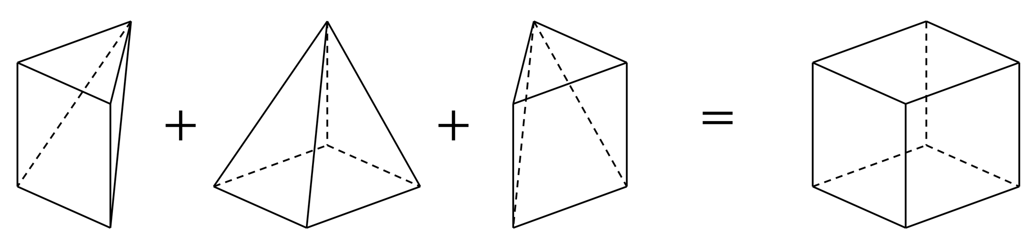

### 球の体積は本当に $\frac{4}{3}\pi r^3$ なのか

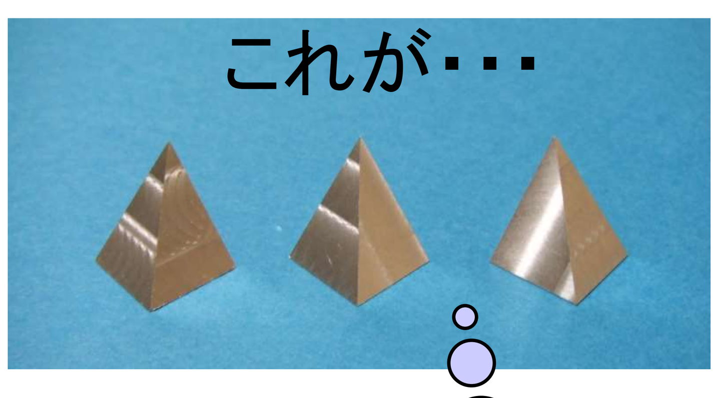
「球の体積は、球に外接する円柱の体積の3分の2である」ことをアルキメデスが発見した
（↑数学の教科書の記述）

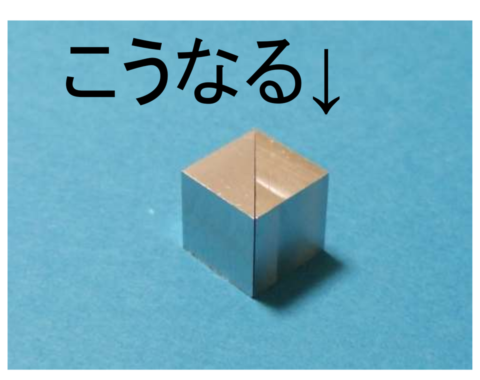
どうやって発見したのだろう？

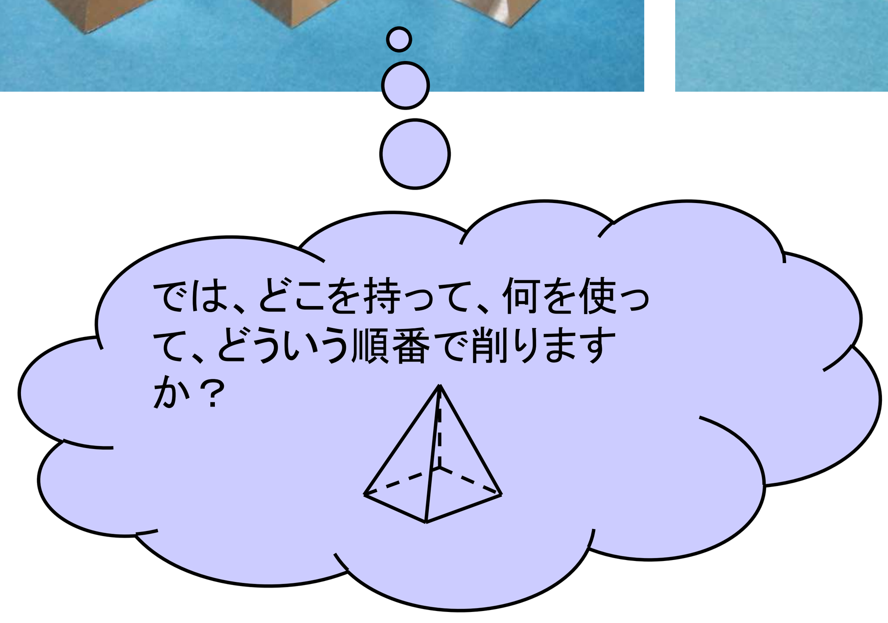
#### その前に‥‥角錐の体積は本当に角柱の3分の1か？

角錐を3つ合わせて角柱になる？



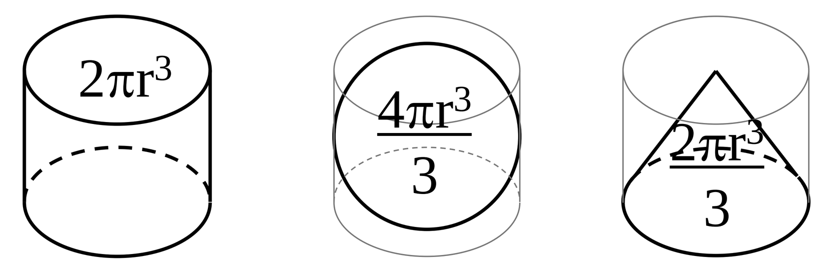


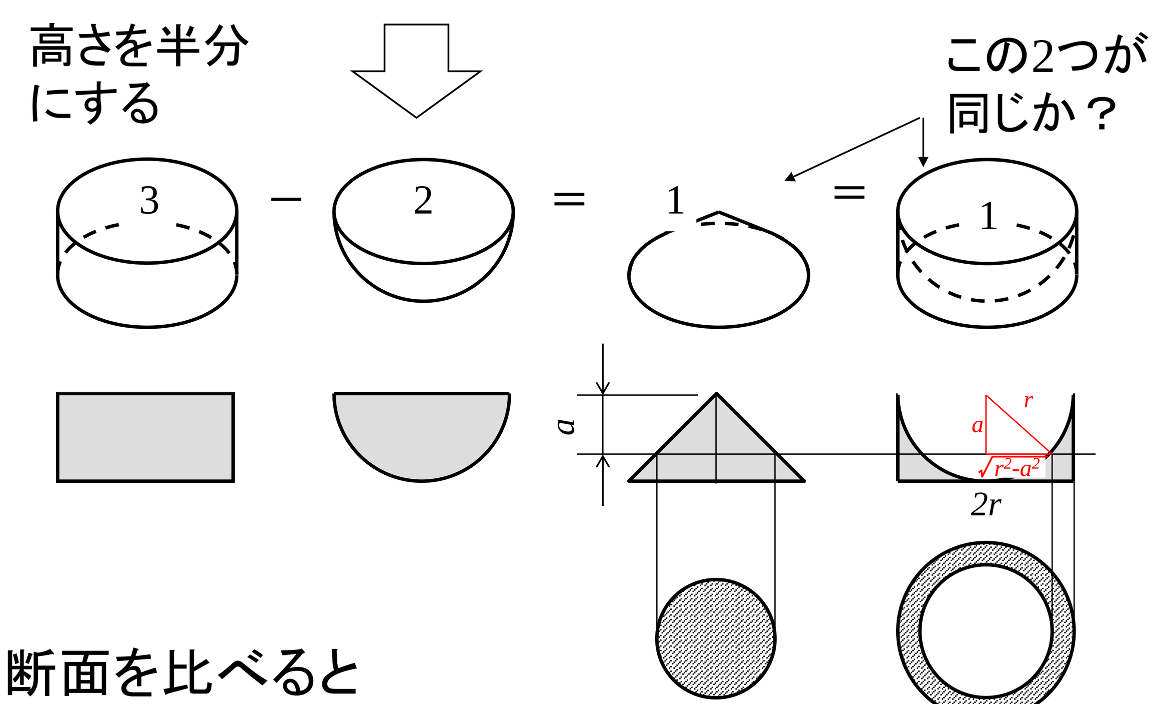




### 円柱：球：円錐の体積比は3:2:1か？

球の体積が円柱の3分の2なら‥

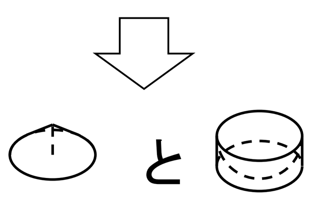



体積比　3　：　2　：　1　となるはず




断面を比べるとどこで切っても同じ面積

$\pi a^2$　　$\pi r^2 - \pi(\sqrt{a^2 - r^2})^2 = \pi a^2$



と　　は同じ体積

球の体積は本当に $\frac{4}{3}\pi r^3$ らしい

### 左と右は同じ重さになる

（ただし加工誤差は残る）


### まとめ

- 数式と図形は等価である
- 一つの事柄を、多面的にとらえたときに、理解が深まる
- 実物に触れるということ
  - 頭が一番働くのは、実物を作るとき
    どんな形になるか？　どうやって作るか？
  - 実物は理論どおりにはいかない